

Grundpraktikum M10 Gyroskop

Julien Kluge

8. Oktober 2015

Student: Julien Kluge [REDACTED]

Partner: [REDACTED]

Betreuer: Dr. Ralph-Peter Blum

Raum: 212

Messplatz: 2

Inhaltsverzeichnis

1	Abstract	1
2	Versuchsdurchführung/-Erklärung	2
2.1	J_x -Bestimmung mit variablen Drehmoment	2
2.2	J_x -Bestimmung mit variabler Drehzahl	2
2.3	J_s -Bestimmung durch Messung der Nutation	2
3	Mess-/Fehlerwerte & Auswertung	2
3.1	J_x -Bestimmung nach Drehmoment	2
3.2	J_x -Bestimmung nach Drehzahl	3
3.3	J_s -Bestimmung durch Messung der Nutation	3
3.4	Berechnung und Vergleich von J_x	3
4	Fehler-/Ergebniseinschätzung	4
5	Anlagen	4
5.1	Abbildungen	4
5.2	Aufgenommene Messwerte	6
6	Quellen	6

1 Abstract

Wenn ein stabil rotierender Körper (optimal rotierend auf einer Hauptträgheitsachse) ein angreifendes Drehmoment M senkrecht zu seiner Drehachse erfährt, reagiert dieser mit einer entgegengesetzten Kraft. Dadurch entsteht eine Drehung um den Normalvektor der Beiden, auch Präzessionsdrehung genannt. Im Experiment wurden aus Messung dieser Periodendauer der Wert für das Trägheitsmoment J_x durch die x-Achse bestimmt.

Gemessen mit $T_p = f(M^{-1})$	$J_x \approx (2.70 \pm 0.04) \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$
Gemessen mit $T_p = f(n)$	$J_x \approx (2.72 \pm 0.01) \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$
Errechnet nach $T_p = \int_V r^2 dm$	$J_x \approx (2.57 \pm 0.99) \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$

Sind der Drehimpuls \vec{L} und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ nicht parallel zueinander, führt der rotierende Körper eine Nutationsbewegung aus. Aus dem Experiment ergab sich daraus das Trägheitsmoment der Scheibe J_s

- $J_s \approx (8.7 \pm 0.4) \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$

2 Versuchsdurchführung/-Erklärung

Der Versuchsaufbau bestand aus einer Art zweifach gelagerten Balkenwaage, an dessen Ende eine Drehscheibe mit Elektromotor angebracht war. Dieser konnte auf eine bestimmte Drehzahl $n[\text{Hz}]$ gebracht und dort gehalten werden. Sie wurde zu anfangs so eingestellt, dass Gleichgewicht herrschte und der Schwerpunkt damit genau über der Aufhängung zu finden war.

2.1 J_x -Bestimmung mit variablen Drehmoment

Als erste Messreihe wurde die Periodendauer der Präzessionsbewegung gemessen. Diese Bewegung wurde durch ein Gewicht verursacht, welches mit der Gewichtskraft $F_g = m \cdot g$ ein Drehmoment auf die Apparatur ausgewirkt hat ($M = r \times (m \cdot g)$). Dabei wurde der Wert für die Erdbeschleunigung aus Quelle 2 entnommen.

Die Drehzahl n wurde konstant gehalten und das angebrachte Gewicht wurde in 50g Schritten auf schlussendlich 500g erhöht. Das Trägheitsmoment J_x konnte damit aus einer Regression nach

$$T_p = \frac{4\pi^2 \cdot n}{M} J_x \quad (1)$$

bestimmt werden.

2.2 J_x -Bestimmung mit variabler Drehzahl

Die zweite Messreihe bestand aus Messung der Periodendauer von der Präzessionsbewegung eines konstanten Gewichtes (200g). Dabei wurde die Drehzahl kontinuierlich jeden Messwert hochgefahren ($[6.5, 15.8]\text{Hz}$). So konnte das Trägheitsmoment J_x nach Formel 1 und einer Regression bestimmt werden.

2.3 J_s -Bestimmung durch Messung der Nutation

In der dritten Messreihe wurde der präzessionsfreie, rotierende Körper aus seiner Drehrichtung gestoßen und somit eine Nutationsbewegung erzeugt. Die Periodendauer der Nutation wurde bei kontinuierlich erhöhter Drehzahl wie in Messreihe zwei gemessen ($[4.2, 11.8]\text{Hz}$). Mithilfe einer Regression kann somit das Trägheitsmoment J_s nach

$$T_N = \frac{J_s}{J_x} \frac{1}{n} \quad (2)$$

bestimmt werden. Dabei wurden die Ergebnisse aus Messreihe eins und zwei für J_x benutzt.

3 Mess-/Fehlerwerte & Auswertung

3.1 J_x -Bestimmung nach Drehmoment

Die gemessenen Werte wurden nach Formel 1 verrechnet. Die Periodendauern sind teilweise aus mehreren Perioden berechnet um die Ungenauigkeiten zu senken. Die Drehzahlen wurden in der Rechnung gesondert behandelt. Es ging hervor, das sich im Laufe der Messreihe die Drehzahl um $\Delta n \approx 0.6\text{Hz}$ linear erhöht hatte. Damit ging die Drehzahl als lineare Funktion in die Formel ein ($n(i) = 12\text{Hz} + i \cdot \frac{\Delta n}{\Delta i}$ mit i : Messpunkt). Somit ergab sich als Abweichung für die Drehzahl per Größtfehlerabschätzung $\frac{\Delta n}{2}$ (circa 0.3Hz). Dabei sind

die Unsicherheiten aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet. Die Unsicherheit für den Radius wurden mit 0.3mm abgeschätzt.

Die Regression über die ermittelten Werte ist in Abb. 1 zu sehen. Es ergibt sich der Wert für das Trägheitsmoment zu:

- $J_x \approx (2.70 \pm 0.04) \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$

3.2 J_x -Bestimmung nach Drehzahl

Die Periodendauern der zweiten Messreihe wurden aus jeweils 3 Perioden errechnet. Eine Regression der verrechneten Messwerte nach der Formel 1 ist in Abb. 2 zu sehen. Dabei wurden die Unsicherheiten für die Drehzahl mit $u_n = \pm 0.2 \text{Hz}$ abgeschätzt. Diese Abschätzung basiert auf beobachtete Schwankungen in der Drehzahl. Die gesamte Unsicherheit wurde mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ermittelt.

Endgültig ergibt sich das Trägheitsmoment damit zu:

- $J_x \approx (2.72 \pm 0.01) \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$

3.3 J_s -Bestimmung durch Messung der Nutation

Um das Trägheitsmoment J_s nach Formel 2 zu berechnen, braucht es einen Wert für J_x . Dieser wurde über ein gewichtetes Mittel der beiden Ergebnisse aus Messreihe eins und zwei mit dem Koeffizienten $C_i = \frac{1}{u_i^2}$ ermittelt. Somit entsteht der zu benutzende Wert für die Gleichung mit

$$J_x = (2.72 \pm 0.01) \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Es ist kein Zufall, dass dieser Wert genau dem der zweiten Messreihe entspricht. So ist die Unsicherheit in dieser um das vierfache kleiner und geht damit mit dem 16-fachen in das gewichtete Mittel ein.

Die Ungenauigkeiten für die Drehzahl wurden analog zur zweiten Messreihe mit $u_n = \pm 0.2 \text{Hz}$ abgeschätzt und per Gauß'sche Fehlerfortpflanzung weiter behandelt. Diese Abweichungen haben eine enorme Größenordnung, sodass sie für die visuelle Darstellung in Abb. 3 herunter skaliert werden müssen.

Trotz der großen Unsicherheiten errechnet sich das Trägheitsmoment zu

- $J_s \approx (8.7 \pm 0.4) \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$

und trifft damit genau den angegebenen Wert und das mit einer kleineren Unsicherheit.

3.4 Berechnung und Vergleich von J_x

Trägheitsmomente lassen sich nach einem Volumenintegral berechnen. Für einen Hohlzylinder gilt:

$$\begin{aligned} \int \int \int_V r^2 dm &= \rho \int \int \int_V r^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \rho \cdot \pi \cdot h (r_2^4 - r_1^4) \end{aligned}$$

Für symmetrische Rotationskörper um die selbe Achse gilt ebenfalls:

$$J_{ges} = \sum_i J_i$$

Somit kann das Trägheitsmoment des Körpers durch Aufteilung in Hohlzylinder berechnet werden. Die Unsicherheiten werden über Größtfehlerabschätzung ermittelt. Insgesamt ergibt sich das Trägheitsmoment zu

- $J_x = (2.57 \pm 0.99) \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$

Dieses Ergebnis stimmt in den Grenzen mit den experimentell ermittelten Werten überein.

4 Fehler-/Ergebniseinschätzung

Die Unsicherheiten wurden für eine Periode immer mit 0.3s abgeschätzt. Dies ist darin begründet, dass die Reaktionszeit besonders bei der dritten Messreihe nicht mehr zufällig ist, sondern systematisiert den Wert nach oben ändert. Der eigentliche Ablesefehler (0.1s) wird durch mehrfache Perioden erreicht.

Eine weitere Fehlerquelle in den ersten beiden Messreihen besteht in dem Winkel, in dem die Aufhängung die Präzession vollzieht. Diese war nie konstant und hat vor allem den empfindlichen Elektromotor gestört und damit die Drehzahl verändert. Der eine erkenntliche "Ausreißer" in der ersten Messreihe (siehe Abb. 1) basiert wohl auf einer fehlerhaften Messung die auch nicht aufgefangen wurde, da dieser Wert einer der zwei war, in denen nur eine Periode gemessen wurde.

Für die dritte Messreihe gilt außerdem, dass die Periodendauern so klein waren, dass es nicht möglich war sie zuverlässig zu messen. Das lag auch daran, dass die Periode kleiner war als die Reaktionszeit des Experimentators.

5 Anlagen

5.1 Abbildungen

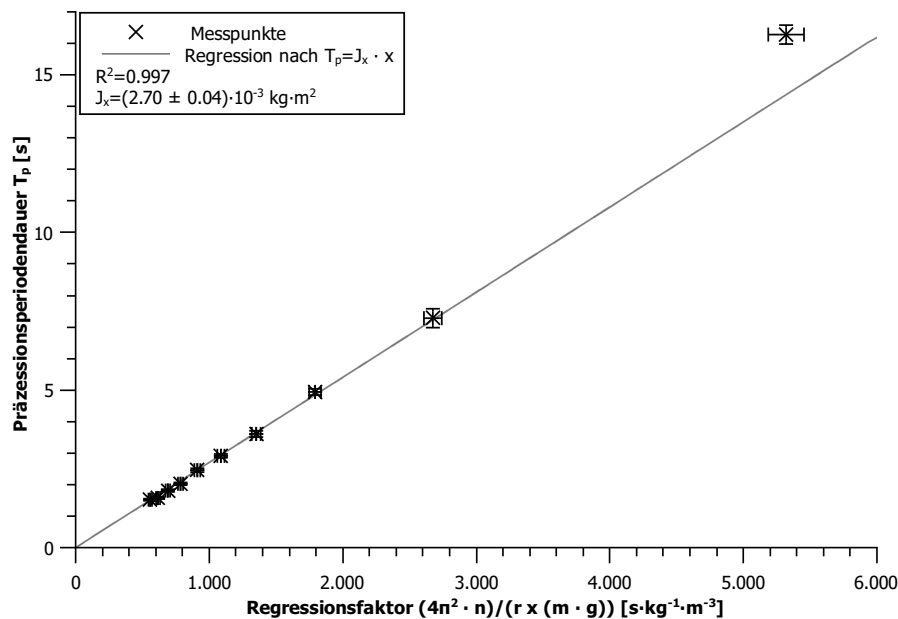


Abbildung 1: Periodendauer der Präzession in Abhängigkeit zum Reziproken des Drehmomentes $M = r \times (m \cdot g)$ und Regression nach Formel 1.

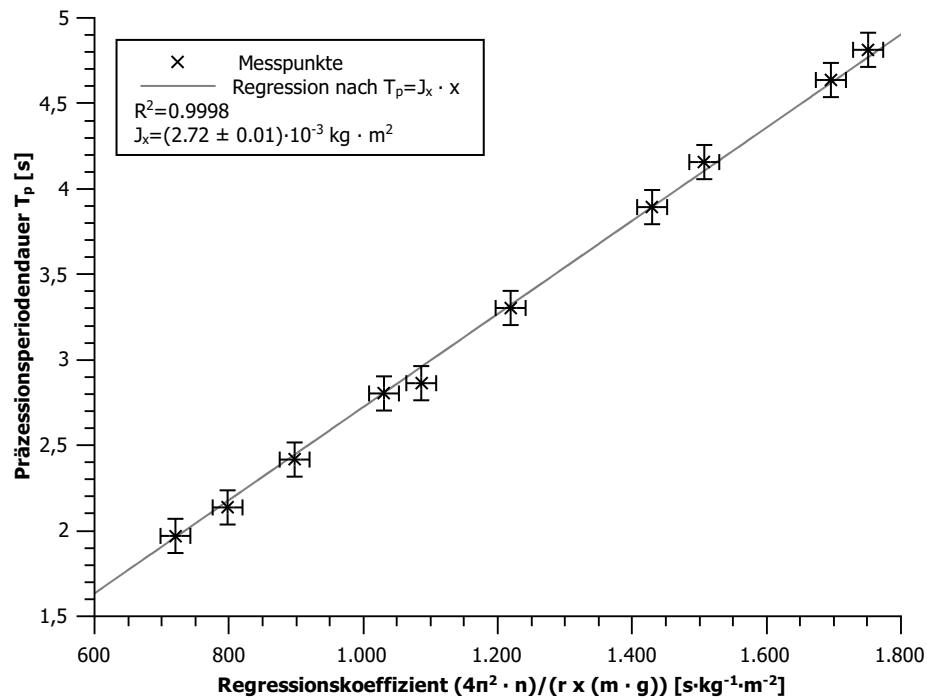


Abbildung 2: Periodendauer der Präzession in Abhängigkeit zur Drehzahl n und Regression nach Formel 1.

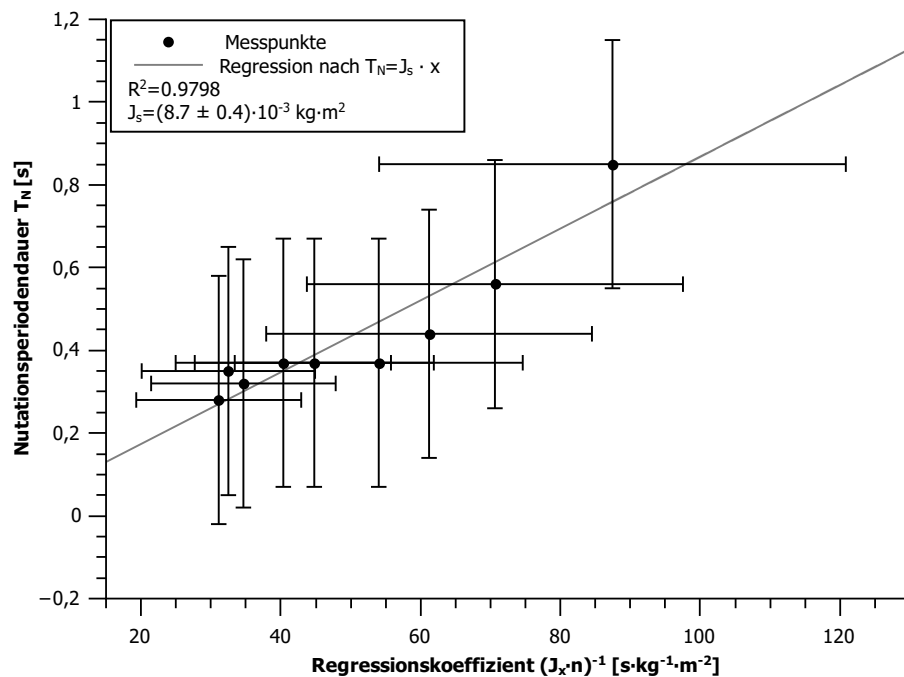


Abbildung 3: Periodendauer der Nutation in Abhängigkeit zum Reziproken der Drehzahl n und Regression nach Formel 2.

5.2 Aufgenommene Messwerte

M10 Gyroskop

Reihe 1 $n = 12 \cdot \frac{1}{5}$

m_m	50g	100	150	200	250	300	350	400	456	500
T	16,28	7,28	14,82	10,82	14,56	12,28	14,78	17,68	14,16	13,68
N	1	1	3	3	5	5	7	7	9	9

Drehzahl stieg auf $\approx 12,6 \frac{1}{5}$

Reihe 2:

h	6,5	7,2	8,1	9,3	9,8	11,0	12,9	13,6	15,3	15,8
T	5,91	6,41	7,25	8,41	8,59	9,91	11,68	12,47	13,91	14,44
N	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Reihe 3

h	4,2	5,2	6,0	6,8	8,2	9,2	9,7	10,6	11,3	11,8
T	0,85	0,56	0,44	0,37	0,37	0,47	0,37	0,32	0,35	0,38

6 Quellen

1. Script zum Grundpraktikum (Formeln, Versuchsbeschreibung)
2. PTB Wert der Erdbeschleunigung $g \approx (9.812614 \pm 0.000020) \text{m/s}^2$
abgerufen: 11.06.2015 16:00 - <http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php>